Les méthodes formelles

État de l'art

Baptiste Pollien

2 juillet 2021

COVNI 2021

Développement d'un système

Le développement d'un système peut être divisé en 3 étapes :

1. **Spécification** des besoins fonctionnels et des contraintes.
2. **Implémentation** du système.
3. **Vérification** que le système correspond bien à la spécification.

Techniques de vérification :

- Revue de code,
- Tests,
- Méthodes formelles.

Les méthodes formelles

- Techniques de vérification basées sur des modèles mathématiques
- Utilisables dans l'avionique avec les normes DO-178C et DO-333
- Exemple : interprétation abstraite, méthodes déductives, model-checking

Objectifs de ma thèse

- Définir des processus de vérification avec des méthodes formelles,
- Appliquer ces méthodes à un autopilote de drone : Paparazzi.

Vérification d'un système

Deux types de propriétés qu'on souhaite vérifier :

- Propriétés **générales** : *erreurs à l'exécution, livelock, deadlock...*
- Propriétés **spécifiques** : *garantir des propriétés fonctionnelles.*

Familles de méthodes de vérification de programme :

- Statique : *interprétation abstraite...*
- Dynamique : *runtime monitoring...*

Limitation

Théorème de Rice

Toute propriété non triviale sur des programmes est indécidable.

Face à un problème indécidable, on peut abandonner :

- la terminaison ;
- la complétude ;
- l'automaticité.

D'où des compromis sur les outils de preuve de programme :

- entre « puissance » de l'outil et automaticité ;
- entre charge de travail du développeur et de l'utilisateur.

Interprétation abstraite

Objectifs : Vérifier qu'un état de la mémoire $x \in \mathcal{D}$ n'est pas accessible.
Exemple de domaine concret : $\mathcal{D} = 2^{(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})}$

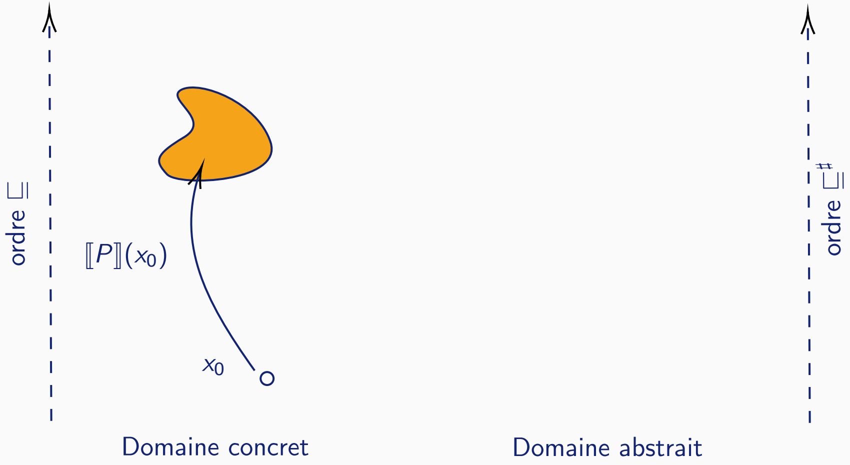
Idéalement,

- à chaque point P du programme,
- on calcule l'ensemble des états possibles : $[\![P]\!](x_0),\ x_0 \in \mathcal{D}$
- et on vérifie si l'état x est accessible : $x \in [\![P]\!](x_0)$?

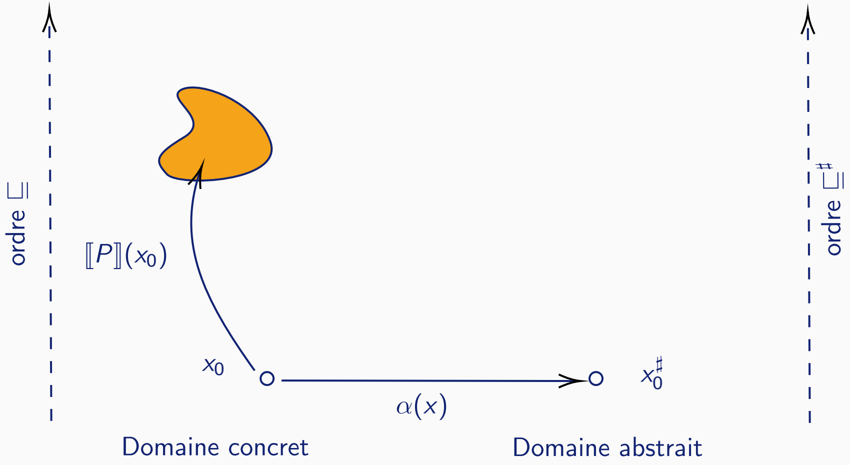
$\Longrightarrow$ Problème non décidable !

Interprétation abstraite : Abstraction des différentes valeurs possibles.

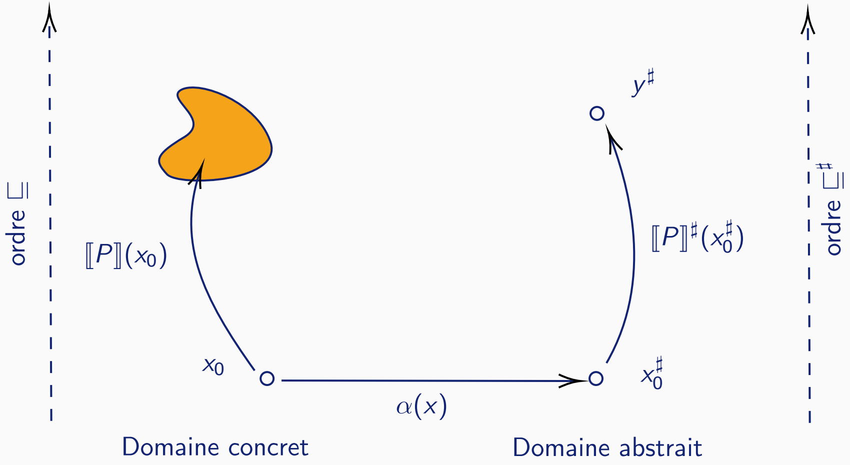
1. Définition d'un domaine abstrait : $\left(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp_{\mathcal{D}}\right)$,
   ex : domaine des intervalles avec l'inclusion comme ordre
2. Définition des opérateurs abstraits,
   ex : $[\![v_1 + v_2]\!]^\sharp(x^\sharp),\ v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ et $x^\sharp \in \mathcal{D}^\sharp$
3. En cas de problèmes de convergence, définition d'opérateurs de *widening*.


ordre $\sqsubseteq$
$[\![P]\!](x_0)$
x_0
Domaine concret
Domaine abstrait
ordre $\sqsubseteq^\sharp$

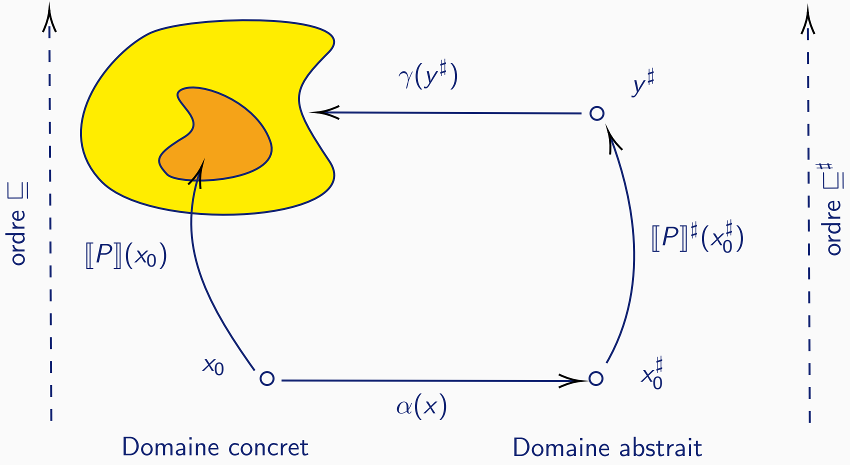
Principe de l'interprétation abstraite



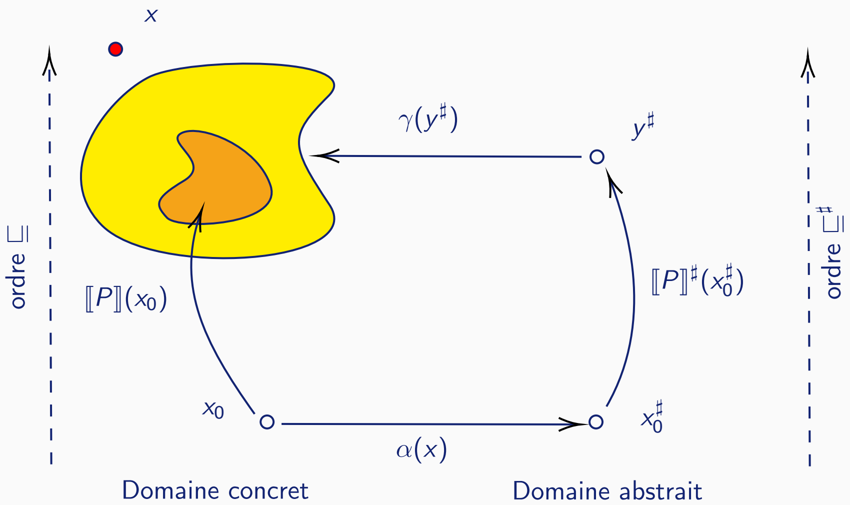
Principe de l'interprétation abstraite



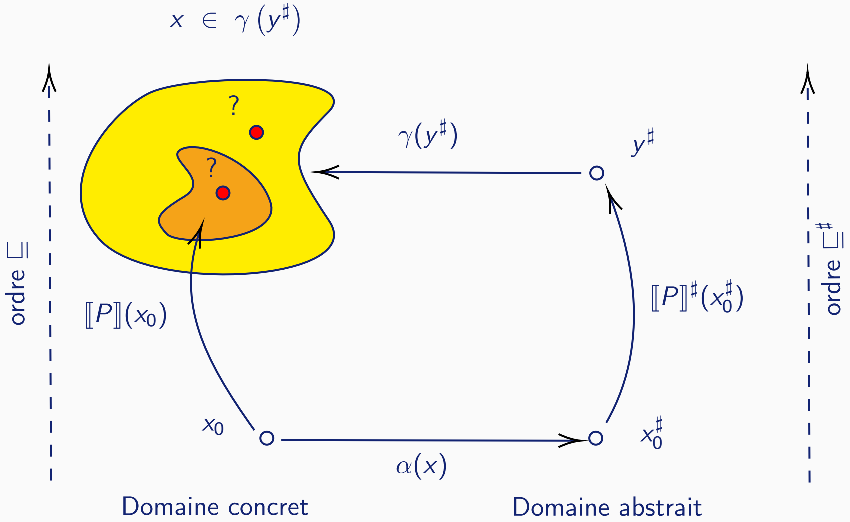
Principe de l'interprétation abstraite



Principe de l'interprétation abstraite

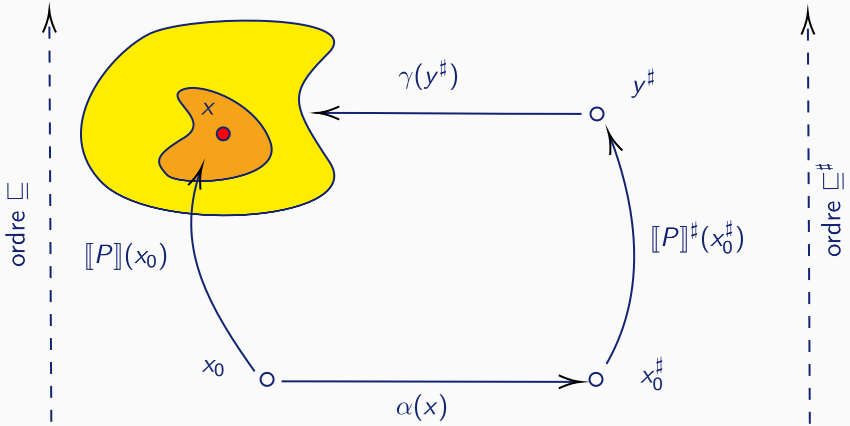


Principe de l'interprétation abstraite



Principe de l'interprétation abstraite

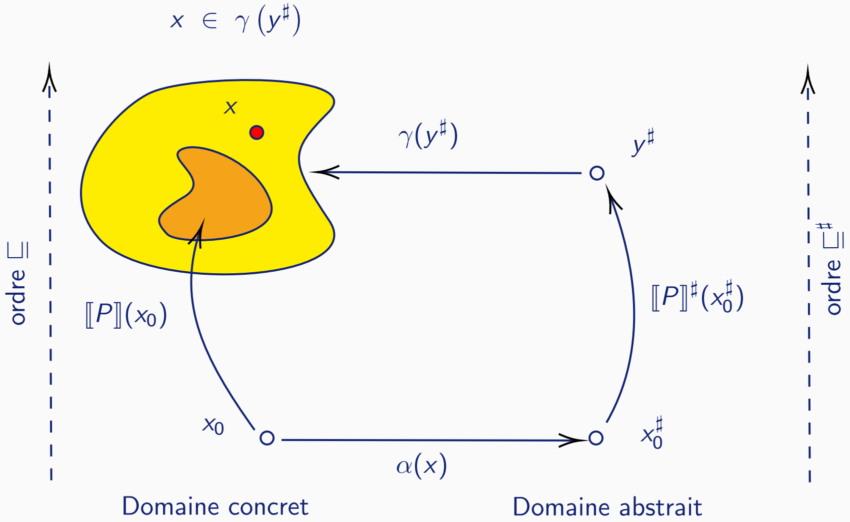
$x \in \gamma(y^\sharp)$



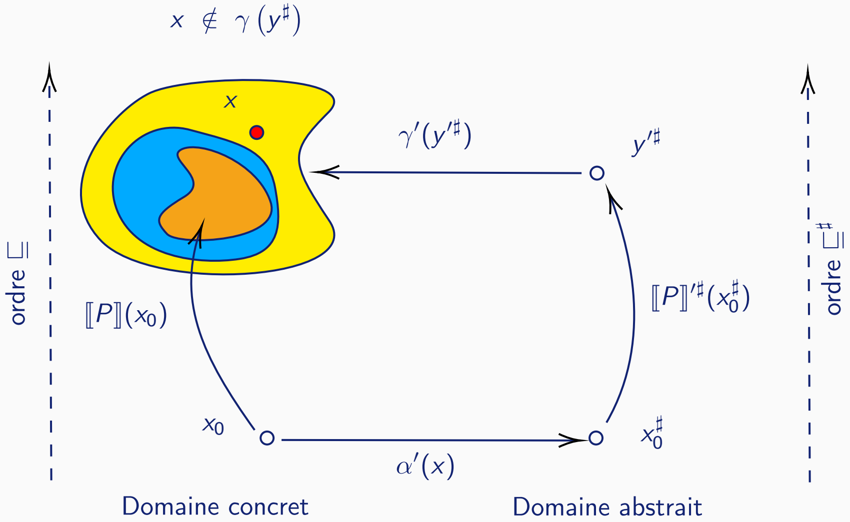
Domaine concret

Domaine abstrait

Principe de l'interprétation abstraite



Principe de l'interprétation abstraite



Domaines abstraits

Exemples de domaines abstraits non relationnels :

- Domaine des signes,
- Domaines des constantes,
- Domaine des intervalles.

Exemples de domaines abstraits relationnels :

- Domaine des polyèdres,
  ex : $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 < b,\ \ a_i, b \in \mathbb{R}, v_i \in \mathbb{V}$
- Domaines des octogones,
  ex : $\pm v_1 \pm v_2 \leq b,\ \ b \in \mathbb{R}, v_i \in \mathbb{V}$

Opérateurs abstraits

Exemples : Opérateurs abstraits génériques.

$$[\![P; Q]\!]^\sharp(x^\sharp) := [\![Q]\!]^\sharp\left([\![P]\!]^\sharp(x^\sharp)\right)$$

$$[\![E_1 + E_2]\!]^\sharp(x^\sharp) := +^\sharp\left([\![E_1]\!]^\sharp(x^\sharp), [\![E_2]\!]^\sharp(x^\sharp)\right)$$

$$[\![\textbf{if } C \textbf{ then } P \textbf{ else } Q \textbf{ fi}]\!]^\sharp(x^\sharp) := [\![P]\!]^\sharp\left([\![C]\!]^\sharp(x^\sharp)\right) \sqcup^\sharp [\![Q]\!]^\sharp\left([\![\neg C]\!]^\sharp(x^\sharp)\right)$$

Exemple : Opérateur abstrait + dans le domaine des intervalles.

$$+^\sharp : (x, y) \mapsto \begin{cases} \emptyset & \text{quand } x = \emptyset \text{ ou } y = \emptyset \\ [a + c, b + d] & \text{quand } x = [a, b] \text{ et } y = [c, d] \end{cases}$$

Résumé interprétation abstraite

Interprétation abstraite (ex. : Astrée, Polyspace, Frama-C/EVA)

+ automatique
+ propriétés numériques (vs logique booléenne)
− outils complexes et spécialisés
− parfois incapable de conclure

Méthodes déductives

Methodes déductive

> “*Deductive program verification is the art of turning the correctness of a program into a mathematical statement and then proving it.*”
>
> Jean-Christophe Filliâtre dans *Deductive Program verification*.

Un système formel

- Un **langage formel** pour exprimer les propriétés à vérifier.
- Un **système déductif** (ou d’inférence) afin de construire les preuves.
  exemple :

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\ (\text{Conj})$$

Logique de Floyd-Hoare

Triplet de Hoare : le langage formel dans la logique de Floyd-Hoare

$$\{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$$

P : un programme,

φ : **précondition** pour le programme P,

ψ : **postcondition** pour le programme P,

Système formel de Floyd-Hoare

Système d'inférence : Un ensemble d'axiomes et de règles utilisé pour dériver des expressions de la logique à partir d'autres expressions.

Exemples de règles d'inférence :

$$\frac{}{\{\varphi[v/E]\}\ \texttt{v := E}\ \{\varphi\}}\ (:=)$$

$$\frac{\{\varphi\}\ \texttt{P}\ \{\gamma\} \qquad \{\gamma\}\ \texttt{Q}\ \{\psi\}}{\{\varphi\}\ \texttt{P;Q}\ \{\psi\}}\ \text{(Seq)}$$

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi' \qquad \{\varphi'\}\ \texttt{P}\ \{\psi'\} \qquad \psi' \Rightarrow \psi}{\{\varphi\}\ \texttt{P}\ \{\psi\}}\ \text{(Cons)}$$

$$\frac{\{\varphi \wedge C\}\ \texttt{P}\ \{\psi\} \qquad \{\varphi \wedge \neg C\}\ \texttt{Q}\ \{\psi\}}{\{\varphi\}\ \texttt{if C then P else Q fi}\ \{\psi\}}\ \text{(Cond)}$$

Remarque : Il n'est pas toujours trivial de construire une preuve à partir des règles d'inférence.

WP (*Weakest Precondition*)

La fonction *wp* effectue un calcul de **plus faible précondition**.

$$\{wp(P, \psi)\}\ P\ \{\psi\}$$

$\Longrightarrow$ *wp* est définie telle que le triplet précédent est toujours vérifié.

Relation entre un triplet de Hoare et *wp* :

$$\{\varphi\}\ P\ \{\psi\} \iff (\varphi \implies wp(P, \psi))$$

La vérification de cette formule peut être automatisée par des prouveurs.

Exemple

On cherche à prouver le triplet :

$$\{x \geq 4\}\ x := x + 1\ \{x \geq 4\}$$
$$\iff (\ (x \geq 4) \implies wp(x := x + 1, x \geq 4))$$

On a la définition suivante de *wp* pour les affectations :

$$wp(v := E,\ \psi) := \psi[v/E]$$

On calcule *wp* :

$$\begin{aligned} \implies wp(x := x + 1, x \geq 4) &= (x \geq 4)[x/x + 1] \\ &= (x + 1 \geq 4) \end{aligned}$$

Il reste donc à prouver que :

$$\begin{aligned} &(x \geq 4) \implies (x + 1 \geq 4) \\ \iff &(x \geq 4) \implies (x \geq 3) \end{aligned}$$

$\square$

Définition de wp

La fonction wp peut être calculée à partir des formules suivantes :

$$wp(v := E,\ \psi) := \psi[v/E]$$

$$wp(P; Q,\ \psi) := wp(P, wp(Q, \psi))$$

$$\begin{aligned} wp(\texttt{if}\ C\ \texttt{then}\ P\ \texttt{else}\ Q\ \texttt{fi},\ \psi) := & \quad (C \rightarrow wp(P, \psi)) \\ \wedge & \quad (\neg C \rightarrow wp(Q, \psi)) \end{aligned}$$

wp se calcule mécaniquement, sauf pour les boucles

$$\begin{aligned} wp(\texttt{while}\ C\ \texttt{do}\ P\ \texttt{od}, \psi) := & \quad I \\ \wedge & \quad (C \wedge I) \rightarrow wp(P, I) \\ \wedge & \quad (\neg C \wedge I) \rightarrow \psi \end{aligned}$$

Résumé méthodes déductives

Méthodes déductives (ex. : B, Caveat, Frama-C/WP)

+ outils beaucoup plus génériques

− moins automatique

MBSE

MBSE

MBSE : *Model Based Systems Engineering*

- Méthode de développement basée sur l'utilisation de modèles,
- Modélisation des systèmes à différents niveaux de complexité.
  ex : interaction entre les composants matériels ou logiciels.

Les modèles peuvent être représentés :

- semi formellement : UML, SysML...
- formellement : automates finis, réseaux de Pétri...

Spécification et vérification d'un modèle

Les spécifications utilisent des languages formels.
$\Longrightarrow$ Supprimer l'ambiguïté du langage naturel.

Exemples de langages formels utilisés :

- **Logique de Floyd-Hoare**
  - Spécification du comportement statique d'une fonction ou d'un programme,
  - Vérification de l'implémentation avec les méthodes déductives.
- **Logique temporelle**
  - Spécification de propriétés pour décrire le comportement dynamique d'un système,
  - Vérification des propriétés sur le modèle par **model-checking**,
  - Génération de code à partir du modèle.

Model-Checking

Model-Checking

Vérification de propriétés temporelles sur des automates finis ou des réseaux de Petri.

Principalement 2 types de propriétés peuvent être vérifiées :

- Propriétés de **sureté** (*safety*) : états d'erreur qui doivent être inatteignables,
- Propriétés de **vivacité** (*liveness*) : tous les états qui doivent être atteints pendant l'exécution.

Remarque : En model-checking, un "model" n'a pas le même sens qu'un modèle en MBSE.

Algorithmes de model-checking

Historiquement, des algorithmes énumératifs étaient utilisés.

- **CTL** (exécutions possibles) : Algorithme de marquage d'états,
  Exemple de propriété : $AX(\varphi \wedge \psi)$
- **PLTL** (chemins possibles) : ω-expressions régulières.
  Exemple de propriété : $G(\neg\psi \rightarrow X\psi)$

$\Longrightarrow$ **Problème d'explosion du nombre d'états**

Model-checking symbolique

Représenter symboliquement des groupes d'états et de transitions.

- **BDD** (*Binary Decision Diagrams*)
- **Formules logiques**
  - utilisées notamment pour le BMC (*Bounded Model Checking*),
  - associées à des prouveurs SAT/SMT.

Résumé model-checking

Model checking (explicite, BDD, SAT/SMT)
(ex. : Spin, NuSMV, Prover verifier, TLA+)

+ relativement automatique
+ logique booléenne (vs propriétés numériques)
− fonctionne rarement sur du code : développement manuel d'un modèle haut niveau (coûteux et potentiellement erroné)

Assistants de preuve

Assistants de preuve

Logiciel pour écrire et vérifier des preuves formelles

- Preuves de théorèmes mathématiques,
- Preuves de propriétés sur des programmes.

Assistants de preuve (ex. Coq, Isabelle/HOL, PVS, Lean)

+ très haut niveau de confiance
+ parfaitement générique
− extrêmement manuel

Projets majeurs

- CompCert : un compilateur C prouvé en Coq,
- Vélus : un compilateur Lustre prouvé en Coq,
- Sel4 : un micronoyau prouvé en Isabelle.

Conclusion

Résumé des techniques de vérification

- **Interprétation abstraite** (ex. : Astrée, Polyspace, Frama-C/EVA)
  - \+ automatique
  - \+ propriétés numériques (vs logique booléenne)
  - – outils complexes et spécialisés
  - – parfois incapable de conclure
- **Méthodes déductives** (ex. : B, Caveat, Frama-C/WP)
  - \+ outils beaucoup plus génériques
  - – moins automatique
- **Model checking** (ex. : Spin, NuSMV, Prover verifier)
  - \+ relativement automatique
  - \+ logique booléenne (vs propriétés numériques)
  - – fonctionne rarement sur du code : développement manuel d'un modèle haut niveau (coûteux et potentiellement erroné)
- **Assistants de preuve** (ex. Coq, Isabelle/HOL, PVS, Lean)
  - \+ très haut niveau de confiance
  - \+ parfaitement générique
  - – extrêmement manuel

Conclusion

Cette présentation est un résumé du rapport :

Formal Verification for Autopilot – Preliminary state of the art

Disponible sur HAL :

`https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03255656/document`

Merci de votre attention

References i

P. Cousot and R. Cousot.
Abstract interpretation : A unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints.
In *POPL*, pages 238–252, 1977.

J.-C. Filliâtre.
***Deductive Program Verification*.**
Thèse d'habilitation, Université Paris-Sud, Dec. 2011.

C. A. R. Hoare.
An axiomatic basis for computer programming.
Commun. ACM, 12(10) :576–580, 1969.